PART3　2 次関数の決定

要点 ① 頂点や軸に関する条件から 2 次関数の決定

頂点の座標や軸の方程式が条件として与えられたときは，求める 2 次関数の式を標準形

$$y=a(x-p)^2+q$$

で表し，与えられた条件を用いて式を立てることができる。

例 頂点が点 (1，2) であり，点 (3，10) を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数を求める。

頂点が点 (1，2) であることより，求める 2 次関数は

$$y=\quad(x\qquad)^2+\quad$$

と表すことができる。

グラフが点 (3，10) を通るから

$$\quad=a(\quad-1)^2+2 \qquad 4a=8 \qquad a=2$$

よって，求める 2 次関数は　$y=\quad(x-1)^2+2$

例 軸が直線 $x=-2$ で，2 点 (1，−6)，(−4，−1) を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数を求める。

軸が直線 $x=-2$ であることより，求める 2 次関数は

$$y=\quad(x\qquad)^2+\quad$$

と表すことができる。

グラフが点 (1，−6)，(−4，−1) を通るから

$$\begin{cases} \quad=\quad a+q & \cdots\cdots① \\ \quad=\quad a+q & \cdots\cdots② \end{cases}$$

① − ②より　$-5=5a$　　$a=-1$

②に代入して　$-1=-4+q$　　$q=3$

よって，求める 2 次関数は　$y=\quad(x+2)^2+\quad$

要点② グラフが通る 3 点から 2 次関数の決定

グラフが通る 3 点の座標が条件として与えられたときは，求める 2 次関数の式を一般形

$$y=ax^2+bx+c$$

で表し，与えられた点の座標を用いて式を立てることができる。

例 3 点 (1, 4)，(−1, −4)，(2, 2) を通る放物線をグラフにもつ 2 次関数を求める。

求める 2 次関数を

$$y=ax^2+bx+c$$

とおく。この関数のグラフが 3 点 (1, 4)，(−1, −4)，(2, 2) を通るから

$$\begin{cases} 4=a+b+c & \cdots\cdots① \\ -4=a-b+c & \cdots\cdots② \\ 2=4a+2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①−②より　$2b=8$　　$b=4$ ……④

④を①に代入して整理すると $a+c=0$ ……⑤

④を③に代入して整理すると $4a+c=-6$ ……⑥

⑤，⑥より $a=-2$，$c=2$

よって，求める 2 次関数は $y=\quad x^2+\quad x+$

上記の①，②，③のような，3 つの文字を含む 1 次方程式を連立した方程式を，連立 3 元 1 次方程式という。連立 3 元 1 次方程式を解くには，1 文字を消去し，残りの 2 文字についての連立方程式を解く，が基本である。

$$\begin{cases} 4=a+b+c & \cdots\cdots① \\ -4=a-b+c & \cdots\cdots② \\ 2=4a+2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

③−①より $3a+b=-2$ ……⑦

③−②より $3a+3b=6$　　よって　$a+b=2$ ……⑧

⑦，⑧より $a=-2$，$b=4$

これらを①に代入して $-2+4+c=4$　　$c=2$

3 次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1) 頂点が点 (2, 5) で，点 (1, 6) を通る。

(2) 軸の方程式が $x=-1$ で，2 点 (1, −9)，(0, −3) を通る。

(3) 3 点 (1, 6)，(−1, 2)，(−2, 9) を通る。

Point Pickup

2 次関数の決定（頂点や軸から）

頂点が点 (●, ■)，軸の方程式が $x=$ ● である放物線をグラフにもつ 2 次関数は

$$y= \quad (x- \quad)^2+$$

と表される。

2 次関数の決定（通る 3 点から）

求める 2 次関数の式を $y= \quad x^2+ \quad x+$ とおき，グラフが通る 3 点の座標を用いて 3 つの 1 次方程式をつくり，それらを連立方程式として解く。

3 つの式から 1 文字を消去し，残りの 2 文字についての連立方程式として解く，が基本方針となる。

第 8 講　PART3 確認問題

次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

1　頂点が点(2，1)で，点(3，0)を通る。

$y=$ ア x^2+ イ $x-$ ウ

2　軸の方程式が $x=1$ で，2 点(0，1)，(3，7)を通る。

$y=$ エ x^2- オ $x+$ カ

3　3 点(0，3)，(1，1)，(−1，9)を通る。

$y=$ キ x^2- ク $x+$ ケ

PART3　2 次関数の決定

3　次の条件を満たす放物線をグラフにもつ 2 次関数を求めよ。

(1)　頂点が点 (2, 5) で，点 (1, 6) を通る。

(2)　軸の方程式が $x=-1$ で，2 点 (1, −9)，(0, −3) を通る。

(3)　3 点 (1, 6)，(−1, 2)，(−2, 9) を通る。

[解答]

(1)　頂点が点 (2, 5) であることより，求める 2 次関数は

$$y=a(x-2)^2+5$$

と表すことができる。

グラフが点 (1, 6) を通るから

$$6=a(1-2)^2+5 \qquad a=1$$

よって，求める 2 次関数は　$y=(x-2)^2+5$

(2)　軸が直線 $x=-1$ であることより，求める 2 次関数は

$$y=a(x+1)^2+q$$

と表すことができる。

グラフが 2 点 (1, −9)，(0, −3) を通るから

$$\begin{cases} -9=4a+q \\ -3=a+q \end{cases}$$

これを解いて，$a=-2$，$q=-1$

よって，求める 2 次関数は　$y=-2(x+1)^2-1$

(3)　求める 2 次関数を

$$y=ax^2+bx+c$$

とおく。この関数のグラフが 3 点 (1, 6)，(−1, 2)，(−2, 9) を通るから

$$\begin{cases} 6=a+b+c & \cdots\cdots① \\ 2=a-b+c & \cdots\cdots② \\ 9=4a-2b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①－②より $2b=4$　　$b=2$　……④

④を①に代入して整理すると $a+c=4$　……⑤

④を③に代入して整理すると $4a+c=13$　……⑥

⑤，⑥より $a=3$，$c=1$

よって，求める 2 次関数は $y=3x^2+2x+1$

（別解）

③－①より $3a-3b=3$　　$a-b=1$　……⑦

③－②より $3a-b=7$　……⑧

⑦，⑧より $a=3$，$b=2$

これらを①に代入して $3+2+c=6$　　$c=1$

よって，求める 2 次関数は $y=3x^2+2x+1$

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：$-$，イ：4，ウ：3

[解説]

頂点が点(2，1)であることより，求める 2 次関数は，

$y=a(x-2)^2+1$ [A]

と表すことができる。

グラフが点(3，0)を通るから，

$0=a(3-2)^2+1$ [B]

$a=-1$

求める 2 次関数は，$y=-(x-2)^2+1$

すなわち，$\boldsymbol{y=-x^2+4x-3}$

[A]　頂点 $(p,\ q)$ が与えられているときは，$y=a(x-p)^2+q$ と表すことができる。

[B]　通る点の座標を代入。

2 **[正解]** エ：2，オ：4，カ：1

[解説]

軸の方程式が $x=1$ であることより，求める 2 次関数は，

$y=a(x-1)^2+q$ [C]

と表すことができる。

グラフが 2 点(0，1)，(3，7)を通るから，

$$\begin{cases} 1=a+q \\ 7=4a+q \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$q=-1$

求める 2 次関数は，$y=2(x-1)^2-1$

すなわち，$\boldsymbol{y=2x^2-4x+1}$

[C]　軸の方程式 $x=p$ が与えられているときは，$y=a(x-p)^2+q$ と表すことができる。

3 [正解] キ：2，ク：4，ケ：3

[解説]

求める 2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ とおく。[D]

グラフが 3 点(0，3)，(1，1)，(−1，9)を通るから，

$$\begin{cases} 3=c & \cdots\cdots① \\ 1=a+b+c & \cdots\cdots② \\ 9=a-b+c & \cdots\cdots③ \end{cases}$$

①を②，③に代入して整理すると，[E]

$$\begin{cases} a+b=-2 \\ a-b=6 \end{cases}$$

これを解いて，$a=2$，$b=-4$

求める 2 次関数は，$\boldsymbol{y=2x^2-4x+3}$

[D]　通る 3 点の座標が与えられているときは，$y=ax^2+bx+c$ と表すことができる。

[E]　c を消去して，a，b の連立方程式をつくる。